Title	Waldspurgerによるp進簡約群のPlancherel公式の構成 (p進群の調和解析)
Author(s)	今野, 拓也
Citation	数理解析研究所講究録 (2003), 1321: 17-42
Issue Date	2003-05
URL	http://hdl.handle.net/2433/43102
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録 1321 巻 2003 年 17-42

Waldspurger による p 進簡約群の Plancherel 公式の構成*

今野 拓也 †

平成 14 年 7 月 22 日

1 導入

このノートでは Waldspurger による p 進簡約群に対する Plancherel 公式の証明 [13] を概説する。局所体上の簡約群に対する Plancherel 公式は非可換調和解析の一つのゴールとして 1970 年代初頭に Harish-Chandra によって考察された。実 Lie 群に対する Plancherel の公式の詳しい証明は 1975 年から翌年にかけての一連の論文 [5], [6], [7] として発表された。Harish-Chandra は同時期に p 進群の場合も考察し、1973 年にはカスプ表現のウェイブパケットに対する Plancherel 公式を構成 [8]、77 年には全 Plancherel 公式の構成を概説している ([9] とその直後の訂正)。しかし不幸にしてその完成を見ないまま Harish-Chandra は 1983 年に死去してしまった。その後彼が、指標の局所可積分性を証明した論文 [4] のうち概説にとどまっている第３部や、p 進群の Plancherel 公式について多くのノートを遺していたことがわかり、L. Clozel と P.-J. Sally がそれを整理し発表する努力を続けてきた。私の理解が正しければ、[13] はこのプロジェクトの一環である。しかし、Waldspurger 自身が導入の中で述べているように、ここでの証明は Harish-Chandra の議論をそのまま再現するものではなく、その後の表現論の進歩を取り入れた新しいものとなっている。

最も重要な変更点は構成の順序の逆転である。Harish-Chandra の構成ではまず Eisenstein 積分が導入され、その解析接続や Maaß-Selberg 等式を用いてその函数等式を得る。そしてそこに現れた c 函数を用いて絡作用素の基本性質を引き出すという道筋である。他方で [14] では [12] の結果を用いた新たな構成が与えられている。[12] は絡作用素を直接的に解析する方法を与えるもので、有限次元表現を用いて $\mathfrak{a}^*_{M,\mathbb{C}}$ 上の微分作用素 D_π と「b 函数」b_π で絡作用素 $J_{\overline{P}|P}(\pi_\lambda)$ が函数等式

$$b_\pi(\lambda)J_{\overline{P}|P}(\pi_\lambda)\phi = J_{\overline{P}|P}(\pi_{\lambda+4\rho_P})I_P^G(\pi_{\lambda+4\rho_P}, D_\pi(\lambda))\phi$$

*数理研短期共同研究「p 進群の調和解析」(2002 年 7 月 1 〜 5 日) での講演録。

†九州大学大学院数理学研究院
電子メール : takuya@math.kyushu-u.ac.jp
ホームページ : http://knmac.math.kyushu-u.ac.jp

を満たすものを構成する。この函数等式により、絡作用素 $J_{\overline{P}|P}(\pi_\lambda)$ をその $4\rho_P$ シフトに関係づけて順次 $-\rho_P$ の方向に解析接続できるだけでなく、$J_{\overline{P}|P}(\pi_\lambda)$ の特異点も b 函数を通じてとらえられる。[14] では絡作用素についてのこれらの情報から Plancherel 測度や Eisenstein 積分、c 函数、ウェイブパケット変換の性質を引き出すことで、従来よりはるかに簡潔な Plancherel 公式の証明を与えている。紹介する [13] では基本的にこの [14] の道筋に沿った構成が採用されている。p 進群の場合には Jacquet 函手の完全性から上の函数等式が 10 頁 (5.1) に単純化し、Harish-Chandra が有理型函数であることを示した絡作用素が実は不分岐指標のなすトーラス上の**有理函数**であることもわかる。この有理性は Langlands 分類と併せて Plancherel 測度の構成に重要な役割を果たす。他方で p 進群の場合は Levi 部分群の離散系列表現のなす（実解析）多様体の各連結成分はコンパクトなため、Plancherel 測度の評価に必要だった離散系列指標（函数）の詳しい解析は不要である。特に指標函数の存在を保証するために置かれていた基礎体の標数が 0 であるという仮定は必要ない。最後に p 進群では K 有限ベクトルの中で表現が実現されているため、K タイプに沿って平均した Eisenstein 積分の代わりに誘導表現の行列成分を用いればよい。これをこのノートでは Eisenstein 函数と呼んでいる。対応して c 函数の定義も絡作用素と Weyl 群の元の合成になってしまう。

このノートは 2001 年度に筆者が [13] について九州大学で行ったセミナーがもとになっている。セミナーノートそのものは筆者のウェッブページからダウンロードできる [15]。そこで詳しい証明の解説はそちらに譲り、ここでは構成の流れのみを概説することにした。特に証明にはほとんど触れず、触れたとしても概略にとどめている。同様の理由から議論の厳密性を犠牲にして、登場人物を中心に解説の順序を次のように変更している。第 1 話では p 進簡約群の基本的な構造を復習した後、扱う表現の圏を指定しそれらの間の放物型誘導および Jacquet 函手を思い出す。さらに上でも触れた絡作用素の基本性質を用意する。第 2 話では Plancherel 公式を構成する緩増加表現を導入し、緩増加表現の圏で Jacquet 函手の代わりをつとめる弱 Jacquet 函手を用意する。続いて放物型誘導表現の可約性を絡作用素の挙動に結びつける Langlands 分類を思い出し、それを用いて誘導表現の可約点が Zariski 閉部分集合に含まれることを見る。これから Plancherel 測度の存在が従う。第 3 話でようやく Schwartz-Harish-Chandra 空間が登場し、その Plancherel 展開が与えられる。まず Eisenstein 函数を導入し、その弱定数項が絡作用素で記述された c 函数であることを示す。これにより離散系列表現からの誘導表現のなすベクトル束の切断の空間から、Schwartz-Harish-Chandra 空間への、ウェイブパケット変換が定義可能になる。最後にウェイブパケット変換の全射性を示して、Plancherel 公式が得られる。

最後になったが忙しい中で今回の研究集会の企画、運営に尽力してくださった京都大学人間環境学研究科の齋藤裕氏、同様に多忙な中、ウェッブページの維持をしてくださり、報告集の作成を担当していただいている大阪府立大学総合科学部の高橋哲也氏に深く感

第 1 話 基礎事項

ここでは以下の構成の基盤となる基礎事実を復習する。

2 記号

F を非アルキメデス局所体とし、そのモヂュラスを $|\ |_F$ と書く。Plancherel 公式の証明には指標函数の解析は必要ないので F が正標数を持ってもよい。

2.1 簡約群

G を F 上定義された連結簡約群とする。その中心 $Z(G)$ 内の極大 F 分裂トーラスを A_G と書く。G の F 有理指標の群 $X^*(G)_F$ を使って A_G の「実 Lie 環」$\mathfrak{a}_G := \mathrm{Hom}(X^*(G)_F, \mathbb{R})$ を定める。Log 写像に当たる $H_G : G(F) \to \mathfrak{a}_G$ を

$$\exp\langle \chi, H_G(g)\rangle = |\chi(g)|_F, \quad \forall \chi \in X^*(G)_F$$

と定義する。F の付値が離散的であることから、この像 $\mathfrak{a}_{G,F} := H_G(G(F))$ は $\mathfrak{a}_G$ 内の $\mathbb{Z}$ 格子になることに注意する。$G(F)^1 := \ker H_G$ とおけば、$G(F)^1$ 上自明な $G(F)$ の (連続) 指標の群 $\widehat{A}_G := \mathrm{Hom}(G(F)/G(F)^1, \mathbb{C}^\times)$ は $\mathfrak{a}_{G,F}$ を指標群とする $\mathbb{C}$ トーラスになる。([15] では $X(G(F))$ と書いたが、ここでは Arthur の最近の慣例にならって $\widehat{A}_G$ と書く。これは G の Langlands 双対群の中のトーラスと同一視されるためこのように書かれる。) そのユニタリ指標からなる部分群を $\widehat{A}_G^1 := \mathrm{Hom}(G(F), \mathbb{C}^1)$ と書く。また $\chi \in \widehat{A}_G$ に対して

$$\exp\langle \lambda, H_G(g)\rangle = |\chi(g)|, \quad \forall g \in G(F)$$

となる $\lambda \in \mathfrak{a}_G^*$ を $\Re\chi$ と書く。

2.2 放物型部分群

以下特に断らなければ、G の F 上定義された放物型部分群やその Levi 成分を単に**放物型部分群**、**Levi 部分群**などと呼ぶ。G の極小 Levi 部分群 M_0 を固定し、それを含む放物型部分群の集合、Levi 部分群の集合をそれぞれ $\mathcal{F}, \mathcal{L}$ と書く。$P \in \mathcal{F}$ は $\mathcal{L}$ に属する Levi 成分をただ一つ持ち、逆に $M \in \mathcal{L}$ を Levi 成分に持つ $\mathcal{F}$ の元の集合 $\mathcal{P}(M)$ は有限集合である。$P = MU \in \mathcal{F}$ に**相対する**放物型部分群を $\bar{P} = M\bar{U}$ と書く。

2.3 制限ルート

$\mathfrak{a}_0 := \mathfrak{a}_{M_0}$, $A_0 := A_{M_0}$ などと略記する。$\mathfrak{a}_G^* = X^*(G)_F \otimes \mathbb{R}$ を制限写像 $X^*(G)_F \ni \chi \mapsto \chi|_{M_0} \in X^*(M_0)_F$ から定まる線型埋め込み $\mathfrak{a}_G^* \hookrightarrow \mathfrak{a}_0^*$ の像と同一視する。A_0 の G での

ルートの集合 Σ_0 はそれの張る $\mathfrak{a}_0^*$ の部分空間 $\mathfrak{a}_0^{G,*}$ 内のルート系になる (**相対ルート系**)。$P_0 \in \mathcal{P}(M_0)$ を選べば対応する正系 $\Sigma_{P_0} \subset \Sigma_0$、その中の単純ルートの集合 Δ_{P_0} などが定まる。また $\mathfrak{a}_0$ での $\mathfrak{a}_G^*$ の零化域 $\mathfrak{a}_0^G$ は $\mathfrak{a}_0^{G,*}$ の双対なので、その中に Δ_{P_0} の元に対するコルートの集合 $\Delta_{P_0}^\vee$ も定まる。**相対 Weyl 群** $W = W^G := \mathrm{Norm}(A_0, G)/M_0$ はこのルート系の Weyl 群に一致する。以下 W をその $\mathrm{Norm}(A_0, G(F))$ での完全代表型と同一視し、$\mathrm{Ad}(w)X$ がその代表元の取り方によらないときにはそれを $w(X)$ と書く。

$\mathfrak{a}_G$ を $\{H \in \mathfrak{a}_0 \,|\, \alpha(H) = 0,\ \forall\alpha \in \Sigma_0\}$ と同一視する。互いに双対な直和分解

$$\mathfrak{a}_0^* = \mathfrak{a}_0^{G,*} \oplus \mathfrak{a}_G^*, \quad \mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_0^G \oplus \mathfrak{a}_G$$

が得られた。

$M \in \mathcal{L}$ のとき A_M の G でのルートの集合を Σ_M と書く。これは一般にルート系にはならない。$P \in \mathcal{P}(M)$ に対して正系 Σ_P、その中の被約ルートの集合 Σ_P^{red} が定まる。P に含まれる $P_0 \in \mathcal{P}(M_0)$ を取り、Σ_P 内の単純ルートの集合を $\Delta_P := \{(\alpha|_{\mathfrak{a}_M}) \,|\, \alpha \in \Delta_{P_0} \setminus \Delta_{P_0^M}\}$ と定義する。同様に対応するコルートの集合 $\Delta_P^\vee := \{(\alpha^\vee|_{\mathfrak{a}_M^*}) \,|\, \alpha^\vee \in \Delta_{P_0}^\vee \setminus \Delta_{P_0^M}^\vee\}$ が定まる。これらは $P_0 \subset P$ の取り方によらない。P に対する正の部屋

$$\mathfrak{a}_P^{*,+} := \{\lambda \in \mathfrak{a}_M^* \,|\, \alpha^\vee(\lambda) > 0,\ \forall\alpha^\vee \in \Delta_P^\vee\}$$

は Δ_P の張る $\mathfrak{a}_M^{G,*}$ 内の開錐と $\mathfrak{a}_G^*$ の直和 ${}^+\mathfrak{a}_P^*$ に含まれている。

不分岐擬指標の群 $\widehat{A}_G$ は $\mathbb{C}$ トーラスだったので、実 Lie 群の場合の直和分解 $\mathfrak{a}_{M,\mathbb{C}}^* = \mathfrak{a}_{M,\mathbb{C}}^{G,*} \oplus \mathfrak{a}_{G,\mathbb{C}}^*$ の代わりに完全列

$$1 \longrightarrow \widehat{A}_G \longrightarrow \widehat{A}_M \longrightarrow \widehat{A}_M^G \longrightarrow 1$$

が用いられる。ここで $\widehat{A}_M^G := \mathrm{Hom}(M(F) \cap G(F)^1/M(F)^1, \mathbb{C}^\times)$ と書いた。射はすべて制限射である。

2.4 極大コンパクト群、測度

$\mathbf{K}$ を $G(F)$ の A_0 に関してよい位置にある極大コンパクト部分群とする。$P = MU \in \mathcal{F}$ に対して**岩澤分解** $G(F) = P(F)\mathbf{K}$ が成り立つ。$g \in G(F)$ の岩澤分解を

$$g = u_P(g)m_P(g)k_P(g), \quad u_P(g) \in U(F),\ m_P(g) \in M(F),\ k_P(g) \in \mathbf{K}$$

と書く。これらの各成分は一意には定まらないことに注意する。また $H_0 = H_{M_0}$ による $\mathfrak{a}_{P_0}^+$ の閉包 $\bar{\mathfrak{a}}_{P_0}^+ \subset \mathfrak{a}_0$ の逆像を $\bar{\mathbf{M}}_{P_0}^+$ として **Cartan 分解**

$$G(F) = \coprod_{m \in \bar{\mathbf{M}}_{P_0}^+/M_0(F)^1} \mathbf{K}m\mathbf{K}$$

が成り立つ。これは $G(F)$ 上の種々の積分の収束性の証明に用いられる。

以下で用いる不変測度を指定しておく。実 Lie 群の場合には Lie 環の Cartan 分解 $\mathfrak{g}=\mathfrak{p}\oplus\mathfrak{k}$ から種々の分解や測度の正規化が得られていたが、p 進群の場合には極大コンパクト部分群は同時に開部分群でもある。そこで G の任意の閉部分群 H に対して開部分群 $H(F)\cap\mathbf{K}\subset H(F)$ の全測度が 1 となるよう $H(F)$ 上の左不変測度を選ぶ。$G(F)$ 上の局所定数コンパクト台付き函数たちのなす畳み込み代数 $\mathcal{H}(G(F))$ を $G(F)$ の **Hecke 環**と呼ぶのだった。$Z(G)(F)$ は $A_G(F)$ を法としてコンパクトであるから、中心を法とした（二乗）可積分性などを論じるときには $G(F)/A_G(F)$ 上でのそれを考えることにする。対応して $\mathfrak{a}_{G,F}$ の部分 $\mathbb{Z}$ 格子 $\widetilde{\mathfrak{a}}_{G,F}:=H_G(A_G(F))$ を取り、$\widehat{A}^1_{A_G}\simeq i\mathfrak{a}^*_G/2\pi i\widetilde{\mathfrak{a}}^*_{G,F}$ 上に全測度が 1 となる不変測度を取る。これにより $\widehat{A}^1_G\simeq i\mathfrak{a}^*_G/2\pi i\mathfrak{a}^*_{G,F}$ にも不変測度が定まる。ここで $\widetilde{\mathfrak{a}}^*_{G,F}$, $\mathfrak{a}^*_{G,F}$ はそれぞれ $\widetilde{\mathfrak{a}}_{G,F}$, $\mathfrak{a}_{G,F}$ の双対格子である。$G(F)$ 自身やその簡約部分群、べき零部分群は両側不変測度を持つ**ユニモヂュラ**群であるが、放物型部分群 $P(F)$ はその限りでない。すなわち先に止めた $P(F)$ 上の左不変測度 dp に対して $\delta_P(p)dp$ が右不変測度となるような擬指標 $\delta_P:P(F)\to\mathbb{R}^\times_+$ は自明ではない。この δ_P を $P(F)$ の**モジュラス**と呼ぶのだった。

$$\gamma(G/M):=\int_{\bar{U}(F)}\delta_P(m_P(\bar{u}))\,d\bar{u}$$

とおく。我々の測度の選び方に対してはこれは $P\in\mathcal{P}(M)$ によらず、$f\in\mathcal{H}(G(F))$ に対して次の積分公式が成り立つ。

$$\int_{G(F)}f(g)\,dg=\int_{U(F)}\int_{M(F)}\int_{\mathbf{K}}f(umk)\delta_P(m)^{-1}\,dk\,dm\,du, \tag{2.1}$$

$$=\gamma(G/M)^{-1}\int_{U(F)}\int_{M(F)}\int_{\bar{U}(F)}f(um\bar{u})\delta_P(m)^{-1}\,d\bar{u}\,dm\,du \tag{2.2}$$

3 表現

3.1 代数表現

$G(F)$ の $\mathbb{C}$ ベクトル空間 V 上の抽象群としての表現 $\pi:G(F)\to GL(V)$ が**代数表現**であるとは、任意の $v\in V$ の固定化群 $\mathrm{Stab}(v,G(F))$ が $G(F)$ の開部分群であることだった。代数表現 (π,V) に対して V の双対空間 V^* 上に

$$\langle\pi^*(g)v^*,v\rangle=\langle v^*,\pi(g^{-1})v\rangle,\quad g\in G(F),\ v^*\in V^*,\ v\in V$$

で定まる**双対表現** (π^*,V^*) は必ずしも代数的でない。代わりにその代数部分

$$V^\vee:=\{v^\vee\in V^*\,|\,\mathrm{Stab}(v^\vee,G(F))\text{ は開部分群}\}$$

への制限 $(\pi^\vee,V^\vee)$ を取り、(π,V) の**反傾表現**と呼ぶ。

例 3.1. $K\subset G(F)$ を開コンパクト部分群として $G(F)$ 上の両側 K 不変函数の空間を $C(K\backslash G(F)/K)$ と書く。

$$C^{\mathrm{alg}}(G(F)):=\bigcup_{\substack{K\subset G(F)\\ \text{開コンパクト部分群}}}C(K\backslash G(F)/K)$$

上の $G(F)$ の右正則表現 R^{alg}

$$[R^{\mathrm{alg}}(g)f](x) := f(xg), \quad g \in G(F),\ f \in C^{\mathrm{alg}}(G(F))$$

は $G(F)$ の代数表現である。その反傾表現は $G(F)$ 上のコンパクト台付き分布の空間 $\mathcal{D}_c(G(F))$ 上の右正則表現である。

3.2 許容表現

$G(F)$ の代数表現 (π, V) が**許容表現**であるとは、任意の開部分群 $K \subset G(F)$ に対して $V^K := \{v \in V \,|\, \pi(k)v = v, \forall k \in K\}$ が有限次元なことだった。このとき反傾表現 $(\pi^\vee, V^\vee)$ は双対表現に一致し、$(\pi^\vee, V^\vee)^\vee \simeq (\pi, V)$ が成り立つ。$v \in V$, $v^\vee \in V^\vee$ はある開コンパクト部分群 $K \subset G(F)$ で不変であるから、対応する**行列成分**

$$f_{v,v^\vee}(g) := \langle \pi(g)v, v^\vee \rangle, \quad g \in G(F)$$

は $C(K\backslash G(F)/K)$ の元である。(π, V) の行列成分たちの張る $C^{\mathrm{alg}}(G(F))$ の部分空間を $\mathcal{A}(\pi)$ と書き、

$$\mathcal{A}(G(F)) := \sum_{\pi\ \text{許容表現}} \mathcal{A}(\pi)$$

とおく。和は $G(F)$ の許容表現の同型類の集合を走る。A_G の有限次元表現 (ρ, V) は広義等型分解

$$V = \bigoplus_{\chi \in \mathcal{E}xp(\rho)} V_\chi, \quad V_\chi := \{v \in V \,|\, (\rho(a) - \chi(a))^n v = 0, \exists n \in \mathbb{N}\}$$

を持つ。$G(F)$ の許容表現 (π, V) に対しても、開コンパクト部分群 $K \subset G(F)$ に対する $A_G(F)$ 加群 V^K の上の分解の帰納極限として、広義等型分解

$$V = \bigoplus_{\chi \in \mathcal{E}xp(\pi)} V_\chi, \quad V_\chi := \{v \in V \,|\, (\pi(a) - \chi(a))^n v = 0, \exists n \in \mathbb{N}\} \tag{3.1}$$

が成り立つ。この $\mathcal{E}xp(\pi)$ の元を π の **(中心) 指数**と呼ぶ。

3.3 B 許容表現

許容表現の定義の有限性はしばしば強すぎ、特にこのノートで扱う表現の連続族を含まない。そこで [2] から B 許容表現を用意しておく。B を可換 $\mathbb{C}$ 代数とする。B 加群 V 上の $G(F)$ の表現 $\pi : G(F) \to \mathrm{Aut}_B(V)$ が B **許容表現**であるとは、

(i) V を $\mathbb{C}$ ベクトル空間とみたとき、(π, V) は $G(F)$ の代数表現。

(ii) V は B 加群として平坦。

(iii) 任意の開部分群 $K \subset G(F)$ に対して V^K は B 上有限生成。

なることとする。

例 3.2. B_G を $\mathbb{C}$ トーラス $\widehat{A}_G$ 上の多項式函数環とする。$g \in G(F)$ は $B_G^\times$ の元

$$b_g : \widehat{A}_G \ni \chi \longmapsto \chi(g) \in \mathbb{C}^\times$$

を与える。特に $B_G^\times$ 値の指標（*Bernstein-Deligne* の意味の**普遍指標**）

$$\mu_{B_G} : G(F) \ni g \longmapsto b_g \in B_G^\times$$

が定まる。$G(F)$ の許容表現 (π, V) に対して $V_B := V \otimes B_G$ 上の $G(F)$ の表現を

$$\pi_B(g) : V_B \ni v \otimes b \longmapsto \pi(g)v \otimes \mu_{B_G}(g)b \in V_B, \quad g \in G(F)$$

と定めれば、これは B_G 許容表現である。さらに $\mathcal{E}xp(\pi_B) := \{\chi := \chi_1 \otimes \mu_{B_G} \mid \chi_1 \in \mathcal{E}xp(\pi)\}$ とし各 $\chi \in \mathcal{E}xp(\pi_B)$ に対して $V_{B,\chi} := V_{\chi_1} \otimes B_G$ とおけば、広義等型部分 B_G 加群による分解

$$V_B := \bigoplus_{\chi \in \mathcal{E}xp(\pi_B)} V_{B,\chi}, \quad V_{B,\chi} := \{v \in V_B \mid (\pi_B(v) - \chi(v))^n v = 0, \exists n \in \mathbb{N}\} \tag{3.2}$$

が成り立つ。

4 放物型誘導と Jacquet 函手

4.1 放物型誘導表現

$P = MU \in \mathcal{F}$ とし (π, V) を $M(F)$ の代数表現とする。

$$I_P^G(V) := \left\{ \phi : G(F) \to V \;\middle|\; \begin{array}{ll} \text{(i)} & \phi \text{ はある開部分群 } K \subset G(F) \text{ で右不変} \\ \text{(ii)} & \phi(umg) = \delta_P(m)^{1/2}\pi(m)\phi(g), \\ & u \in U(F),\, m \in M(F),\, g \in G(F) \end{array} \right\}$$

上の $G(F)$ の右移動表現

$$[I_P^G(\pi, g)\phi](x) = \phi(xg), \quad g \in G(F), \phi \in I_P^G(V)$$

を (π, V) からの P に沿った**放物型誘導表現**と呼ぶ。I_P^G は $M(F)$ の代数表現の圏 $\mathrm{Alg}(M(F))$ から $G(F)$ のそれ $\mathrm{Alg}(G(F))$ への、あるいは B 許容表現からなる部分圏 $\mathrm{Adm}_B(M(F))$ から $\mathrm{Adm}_B(G(F))$ への完全函手である。また $I_P^G(V)$ と $I_P^G(V^\vee)$ の間の双対性

$$\langle \phi, \phi^\vee \rangle := \int_{\mathbf{K}} \langle \phi(k), \phi^\vee(k) \rangle \, dk, \quad \phi \in I_P^G(V), \phi^\vee \in I_P^G(V^\vee)$$

は同型 $I_P^G(\pi)^\vee \simeq I_P^G(\pi^\vee)$ を与える。

4.2 Jacquet 加群

G の代数表現 (π, V) と $P = MU \in \mathcal{F}$ に対して、

$$V_P := V/V(U), \quad V(U) := \mathrm{Span}\{\pi(u)v - v \mid u \in U(F), v \in V\}$$

とおき、$j_P : V \twoheadrightarrow V_P$ を自然な射影とする。

$$\pi_P(m) j_P(v) = \delta_P(m)^{-1/2} j_P(\pi(m)v), \quad m \in M(F), v \in V$$

によって定まる $M(F)$ の表現 (π_P, V_P) を (π, V) の P に沿っての **Jacquet 加群**と呼ぶ。π に π_P を対応させる函手 r_P^G は $\mathrm{Alg}(G(F))$ から $\mathrm{Alg}(M(F))$ への、そして $\mathrm{Adm}_B(G(F))$ から $\mathrm{Adm}_B(M(F))$ への完全函手である。ここで [3, § 4] から次を引用しよう。$t \in \mathbb{R}_+^\times$ に対して

$$\mathbf{A}_P^+(t) := \{a \in A_M(F) \mid |\alpha(a)|_F > t, \forall \alpha \in \Delta_P\}$$

と書く。

定理 4.1. *(i)* 双線型形式 $\langle\, ,\, \rangle_P : V_P \times (V^\vee)_{\overline{P}} \to \mathbb{C}$ であって、$v \in V$, $v^\vee \in V^\vee$ に対して $t > 1$ を十分大きく取れば、

$$\langle \pi_P(a^{-1}) j_P(v), j_{\overline{P}}(v^\vee) \rangle_P - \delta_P(a)^{1/2} \langle \pi(a^{-1})v, v^\vee \rangle, \quad \forall a \in \mathbf{A}_P^+(t)$$

が成り立つものがただ一つある。
(ii) $\langle\, ,\, \rangle_P$ は非退化かつ $M(F)$ 不変。すなわち $(\pi_P)^\vee \xrightarrow{\sim} (\pi^\vee)_{\overline{P}}$ である。

特に $v \in V$, $v^\vee \in V^\vee$ の行列成分 $f_{v,v^\vee} \in \mathcal{A}(\pi)$ に

$$(f_{v,v^\vee})_P(m) := \langle \pi_P(m) j_P(v), j_{\overline{P}}(v^\vee) \rangle_P, \quad m \in M(F)$$

を対応させる写像は

$$\delta_P(ma)^{1/2} f(ma) = f_P(ma), \quad a \in A_M(F), \alpha(H_M(a)) << 0, \forall \alpha \in \Delta_P \tag{4.1}$$

を満たす線型写像 $\mathcal{A}(G(F)) \ni f \mapsto f_P \in \mathcal{A}(M(F))$ に延びる。この f_P を $f \in \mathcal{A}(G(F))$ の P に沿っての**定数項**と呼ぶ。

4.3 基本性質

$P = MU \in \mathcal{F}$ とし、(π, V) を $G(F)$ の (τ, E) を $M(F)$ の代数表現とするとき、**Frobenius 相互律**（の変形）

$$\mathrm{Hom}_{G(F)}(\pi, I_P^G(\tau)) \simeq \mathrm{Hom}_{M(F)}(\pi_P, \tau)$$

が成り立つ。すなわち r_P^G は I_P^G の左随伴函手である。

$P, P' \in \mathcal{F}$ に対して $W^{M'}\backslash W/W^M$ の完全代表系 ${}_{P'}W_P$ を取れば、**Bruhat 分解**

$$G = \coprod_{w \in {}_{P'}W_P} Pw^{-1}P'$$

が成り立つ。${}_{P'}W_P$ に p 進位相での閉包の関係

$$P(F)w^{-1}P'(F) \subset \overline{\coprod_{\substack{w' \in {}_{P'}W_P \\ w' > w}} P(F)w'^{-1}P'(F)}$$

が成り立つような全順序 $w' > w$ を一つ固定する。(π, V) を $M(F)$ の代数表現とするとき、$I_P^G(V)$ の ${}_{P'}W_P$ を添字集合とする減少フィルタ $\{\mathcal{F}_w\}_{w \in {}_{P'}W_P}$ (**Bruhat フィルタ**) を

$$\mathcal{F}_w := \left\{ \phi \in I_P^G(V) \,\middle|\, \operatorname{supp}\phi \subset \coprod_{\substack{w' \in {}_{P'}W_P \\ w' \geq w}} P(F)w'^{-1}P'(F) \right\}$$

と定める。

$$p_w(\phi)(m') := \delta_{P'}(m')^{-1/2} \int_{(U' \cap w(P))(F) \backslash U'(F)} j_{w^{-1}(P')^M}(\phi(w^{-1}u'm'))\, du' \qquad (4.2)$$

とおけば、これは定義可能な $M'(F)$ 準同型

$$\bar{p}_w : (\mathrm{Gr}_w \mathcal{F}_\bullet)_{P'} \xrightarrow{\sim} I_{w(P)^{M'}}^{M'}(w(V_{w^{-1}(P')^M}))$$

を与える。ここで $\mathrm{Gr}_w \mathcal{F}_\bullet := \mathcal{F}_w / \mathcal{F}_{>w}$ と書いている。特に (π, V) が長さ有限許容表現の時には、$M'(F)$ の長さ有限許容表現の圏の Grothendieck 群での等式

$$[I_P^G(\pi)_{P'}] = \sum_{w \in {}_{P'}W_P} [I_{w(P)^{M'}}^{M'}(w(\pi_{w^{-1}(P')^M}))] \qquad (4.3)$$

が成り立っている。

5 絡作用素

$M \in \mathcal{L}$ とし (π, V) を $M(F)$ の長さ有限許容表現とする。$\chi \in \widehat{A}_M$ はそのような (π, V) の集合に $(\pi, V) \mapsto (\pi_\chi, V_\chi) := (\pi \otimes \chi, V)$ と作用する。(π, V) の同型類 π の $\widehat{A}_M$ 軌道を

$$\mathfrak{P} := \{\pi_\chi \,|\, \chi \in \widehat{A}_M\} \simeq \widehat{A}_M / \mathrm{Stab}(\pi, \widehat{A}_M)$$

と書く。ここで $\mathrm{Stab}(\pi, \widehat{A}_M) := \{\chi \in \widehat{A}_M \,|\, \pi_\chi \simeq \pi\}$ は有限群であるから、$\mathfrak{P}$ には $\mathbb{C}$ トーラス $\widehat{A}_M / \mathrm{Stab}(\pi, \widehat{A}_M)$ の主等質空間としての $\mathbb{C}$ 多様体の構造が入る。特にその上の多項式函数や有理函数が考えられる。

$P, P' \in \mathcal{P}(M)$ として

$$\big(J_{P'|P}(\pi_\chi)\phi\big)(g) := \int_{(U'\cap U)(F)\backslash U'(F)} \phi(u'g)\,du', \quad \phi \in I_P^G(V_\lambda)$$

とおく。また $\mathbf{K}^P := \mathbf{K} \cap P(F)$ などとして

$$I_{\mathbf{K}^P}^{\mathbf{K}}(V) := \left\{ \phi : \mathbf{K} \to V \;\middle|\; \begin{array}{ll} \text{(i)} & \phi \text{ は局所定数} \\ \text{(ii)} & \phi(umk) = \pi(m)\phi(k), \\ & u \in \mathbf{K}^U,\, m \in \mathbf{K}^M,\, k \in \mathbf{K} \end{array} \right\}$$

とおけば、岩澤分解から

$$\mathrm{res}_{\mathbf{K}}^P(\pi_\chi) : I_P^G(V_\chi) \ni \phi \longmapsto \phi|_{\mathbf{K}} \in I_{\mathbf{K}^P}^{\mathbf{K}}(V)$$

は同型である。

定理 5.1. *(i)* $\alpha^\vee(\Re\chi) >> 0$, $(\forall\alpha \in \Sigma_P \setminus \Sigma_{P'})$ のとき $J_{P'|P}(\pi_\lambda)\phi$ の定義積分は絶対収束。
(ii) ある開コンパクト部分群 $K \subset \mathbf{K}$ に対して $\phi \in I_{\mathbf{K}^P}^{\mathbf{K}}(V)^K$ のとき

$$\mathfrak{P} \ni \pi' \longmapsto \mathrm{res}_{\mathbf{K}}^{P'}(\pi') \circ J_{P'|P}(\pi') \circ \mathrm{res}_{\mathbf{K}}^P(\pi')^{-1}(\phi) \in I_{\mathbf{K}^{P'}}^{\mathbf{K}}(V)^K$$

は有理函数。$I_{\mathbf{K}^{P'}}^{\mathbf{K}}(V)^K$ は有限次元であることに注意せよ。

証明. (スケッチ) (i) は実 Lie 群の場合と同様の標準的な議論によるので省略する。
(ii) $B_M = \mathbb{C}[\widehat{A}_M]$ と $M(F)$ の B_M 許容表現 (π_B, V_B) を思い出す。これから誘導される $(I_P^G(\pi_B), I_P^G(V_B))$ は $G(F)$ の B_M 許容表現である。B_M 許容表現の準同型 $J \in \mathrm{Hom}_{G(F),B_M}(I_P^G(V_B), I_{P'}^G(V_B))$ と $b \in B_M$ があって

$$b(\chi)J_{P'|P}(\pi_\chi)\phi_\chi = J(\phi)_\chi, \quad \chi \in \widehat{A}_M,\, \phi \in I_P^G(V_B) \tag{5.1}$$

が成り立つことを言えばよい。そこで Frobenius 相互律

$$\mathrm{Hom}_{G(F),B_M}(I_P^G(V_B), I_{P'}^G(V_B)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{M(F),B_M}(I_P^G(V_B)_{P'}, V_B) \tag{5.2}$$

による J の像 j をまず構成する。$I_P^G(V_B)_{P'}$ は Bruhat フィルタ $\mathcal{F}_{w,P'}$ たちの合併であり、V_B は $\mathrm{Gr}_1\mathcal{F}_{\bullet,P'}$ であるから、$w < 1$ なる w の階層を消すことを考える。例 3.2 (3.2) のようにこれらの B_M 許容表現に対しては中心指数が定義されていた。各 $\chi \in \widehat{A}_M$ でのファイバはその限りではないが、B_M 許容表現としては $\mathcal{E}xp(\mathrm{Gr}_w\mathcal{F}_{\bullet,P'})$ と $\mathcal{E}xp(\mathrm{Gr}_1\mathcal{F}_{\bullet,P'})$ が交わりを持たないことから、B_M 係数の $A_M(F)$ の群環の元 $R \in B_M[A_M(F)]$ と $b \in B_M$ で

- $\mathrm{im} I_P^G(\pi_B)_{P'}(R) \subset \mathcal{F}_{1,P'}$;
- $I_P^G(\pi_B)_{P'}(R)$ は $\mathrm{Gr}_1\mathcal{F}_{\bullet,P'}$ 上に b 倍作用を引き起こす。

なるものがとれる。そこで

$$j : I_P^G(V_B)_{P'} \xrightarrow{I_P^G(\pi_B)_{P'}(R)} \mathcal{F}_{1,P'} \xrightarrow{\text{標準射影}} \mathrm{Gr}_1\mathcal{F}_{\bullet,P'} \xrightarrow{\bar{p}_1} V_B$$

とおけばこれは一つ目の条件から定義可能。それに (5.2) で対応する $J : I_P^G(V_B) \to I_{P'}^G(V_B)$ を取れば二つ目の条件から (5.1) が成り立つ。 $\square$

$P,\ P' \in \mathcal{P}(M)$ に対応する Weyl の部屋 $\mathfrak{a}_P^{*,+}$ と $\mathfrak{a}_{P'}^{*,+}$ の間にある壁の枚数を $d(P, P')$ と書く。

補題 5.2. *(i)* $P,\ P',\ P'' \in \mathcal{P}(M)$ が $d(P'',P) - d(P'',P') + d(P',P)$ を満たすとき**函数等式**

$$J_{P''|P}(\pi) = J_{P''|P'}(\pi) \circ J_{P'|P}(\pi)$$

が成り立つ。
(ii) **随伴公式**

$$\langle J_{P'|P}(\pi)\phi, \phi^\vee\rangle = \langle \phi, J_{P|P'}(\pi^\vee)\phi^\vee\rangle, \quad \phi \in I_P^G(V),\ \phi^\vee \in I_{P'}^G(V^\vee)$$

が成立する。

第 2 話 Langlands 分類の活用

6 緩増加表現

6.1 二乗可積分表現

$G(F)$ の許容表現 (π, V) が $Z(G)(F)$ のある擬指標 ω に対して

$$\pi(z)v = \omega(z)v, \quad z \in Z(G)(F),\ v \in V$$

を満たすとき、(π, V) は中心指標 ω を持つといい、その中心指標 ω を ω_π と書く。ユニタリな中心指標を持つ $G(F)$ の許容表現 (π, V) が**二乗可積分**とは、

$$\int_{G(F)/A_G(F)} |f_{v,v^\vee}(g)|^2\, dg < \infty, \quad \forall v \in V,\ v^\vee \in V^\vee$$

なることとする。仮定から $|f_{v,v^\vee}|^2$ は $G(F)/A_G(F)$ 上の函数であることに注意する。定義から二乗可積分許容表現は $G(F)$ 不変なユニタリ内積を持つ**ユニタリ化可能**表現である。与えられた許容表現が二乗可積分であるか否かについては次の **Langlands-Casselman の判定律**が基本的である。

命題 6.1. ユニタリな中心指標を持つ $G(F)$ の許容表現 (π, V) が二乗可積分であるためには、

$$\Re\big(\mathcal{E}xp(\pi_P)\big) \subset {}^+\mathfrak{a}_P^{G,*}, \quad \forall P \in \mathcal{F}$$

が成り立つことが必要十分である。

$G(F)$ の既約二乗可積分表現の同型類の集合を $\Pi_2(G(F))$ と書き、そのうち中心指標が ω であるものたちからなる部分集合を $\Pi_2(G(F))_\omega$ と書く。二乗可積分表現に対しては次の **Schur の直交関係**が証明できる。

補題 6.2. $(\pi_i, V_i) \in \Pi_2(G(F))_\omega$ とするとき、$v_i \in V_i$, $v_i^\vee \in V_i^\vee$, $(i = 1, 2)$ に対して次が成り立つ。

$$\int_{G(F)/A_G(F)} f_{v_1,v_1^\vee}(g) f_{v_2,v_2^\vee}(g^{-1})\, dg = \begin{cases} 0 & \pi_1 \not\simeq \pi_2 \text{ のとき} \\ \dfrac{\langle v_1, v_2^\vee\rangle\langle v_2, v_1^\vee\rangle}{d(\pi_1)} & \pi_1 = \pi_2 \text{ のとき}. \end{cases}$$

ここで $d(\pi_1)$ は正実数であり、π_1 の**形式次数** ***(formal degree)*** と呼ばれる。

6.2 緩増加表現

$P_0 = M_0U_0 \in \mathcal{P}(M_0)$ を止め、$M_0(F)$ の単位表現 $\mathbf{1}_{M_0}$ からの誘導表現 $(I_{P_0}^G(\mathbf{1}_{M_0}), I_{P_0}^G(\mathbb{C}))$ を考える。これは自己双対な $G(F)$ の表現で、岩澤分解から $I_{P_0}^G(\mathbb{C})$ は

$$\phi_0(umk) := \delta_{P_0}(m)^{1/2}, \quad u \in U_0(F),\ m \in M_0(F),\ k \in \mathbf{K}$$

なるベクトル ϕ_0 を含む。これについての行列成分

$$\Xi(g) := f_{\phi_0,\phi_0}(g) = \int_{\mathbf{K}} \phi_0(kg)\phi_0(k)\,dk = \int_{\mathbf{K}} \delta_{P_0}(m_{P_0}(kg))^{1/2}\,dk$$

を Harish-Chandra の Ξ **函数**と呼ぶ。

3.2 節で触れた $\mathcal{A}(G(F))$ の元 f で、適当な $c > 0,\ r \in \mathbb{R}$ に対して

$$|f(g)| \le c\Xi(g)(1 + \log\|g\|)^r, \quad \forall g \in G(F)$$

を満たすものたちのなす空間を $\mathcal{A}_{\mathrm{temp}}(G(F))$ と書く。$G(F)$ の許容表現 (π, V) はその任意の行列成分が $\mathcal{A}_{\mathrm{temp}}(G(F))$ に属するとき、**緩増加**であると言われる。前出の Langlands-Casselman 判定律から次が従う。

命題 6.3. $G(F)$ の許容表現 (π, V) が緩増加であるためには

$$\Re\big(\mathcal{E}xp(\pi_P)\big) \subset {}^+\bar{\mathfrak{a}}_P^{G,*}, \quad \forall P \in \mathcal{F}$$

となることが必要十分である。ただし ${}^+\bar{\mathfrak{a}}_P^{G,*}$ は ${}^+\mathfrak{a}_P^{G,*}$ の閉包である。

7 弱 Jacquet 加群

$G(F)$ の緩増加許容表現 (π, V) の $P = MU \in \mathcal{F}$ に沿っての Jacquet 加群を、中心指数の実部により

$$(\pi_P, V_P) = (\pi_P^{\mathrm{w}}, V_P^{\mathrm{w}}) \oplus (\pi_P^+, V_P^+),$$
$$V_P^{\mathrm{w}} := \bigoplus_{\substack{\chi \in \mathcal{E}xp(\pi_P) \\ \Re\chi = 0}} V_{P,\chi}, \quad V_P^+ := \bigoplus_{\substack{\chi \in \mathcal{E}xp(\pi_P) \\ \Re\chi \in {}^+\bar{\mathfrak{a}}_P^{G,*} \setminus \{0\}}} V_{P,\chi}$$

と分解する。これは $M(F)$ 加群としての直和分解である。この $(\pi_P^{\mathrm{w}}, V_P^{\mathrm{w}})$ を (π, V) の P に沿っての**弱 Jacquet 加群**と呼ぶ。

命題 7.1. *(i)* (π, V) が $M(F)$ の許容緩増加表現ならば $(I_P^G(\pi), I_P^G(V))$ も $G(F)$ の許容緩増加表現。
(ii) (π, V) が $G(F)$ の許容緩増加表現ならば $(\pi_P^{\mathrm{w}}, V_P^{\mathrm{w}})$ も $M(F)$ の許容緩増加表現。
(iii) (π, V) が $G(F)$ の、(τ, W) が $M(F)$ の許容緩増加表現とするとき、*Frobenius* 相互律は

$$\mathrm{Hom}_{G(F)}(\pi, I_P^G(\tau)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{M(F)}(\pi_P^{\mathrm{w}}, \tau)$$

(iv) (π, V) が $M(F)$ の許容緩増加表現の時、*Bruhat* フィルタの同型 $\bar{p}_w$ は同型

$$(\mathrm{Gr}_w\mathcal{F}_\bullet)^{\mathrm{w}}_{P'} \xrightarrow{\sim} I^{M'}_{w(P)M'}(w(\pi^{\mathrm{w}}_{w^{-1}(P')M}))$$

に制限される。

これらと Langlands-Casselman の判定律をあわせて次がわかる。

補題 7.2. ユニタリ中心指標を持つ $G(F)$ の許容緩増加表現 (π, V) が二乗可積分であるためには、任意の $P \subsetneq G, \in \mathcal{F}$ に対して $\pi^{\mathrm{w}}_P = 0$ となることが必要十分。

これから次の弱い分類定理が従う。$G(F)$ の既約緩増加表現の同型類の集合を $\Pi_{\mathrm{temp}}(G(F))$ と書く。

系 7.3. 任意の $\pi \in \Pi_{\mathrm{temp}}(G(F))$ に対して、$M \in \mathcal{L}$ と $\sigma \in \Pi_2(M(F))$ の組 (M, σ) であって、π が $I^G_P(\sigma)$, $(\forall P \in \mathcal{P}(M))$ の既約直和因子となるものが共役をのぞいてただ一つある。特に既約緩増加表現はユニタリ化可能である。

さらに (π, V) が $M(F)$ の長さ有限緩増加表現ならば絡作用素 $J_{P'|P}(\pi_\chi)$, $(P, P' \in \mathcal{P}(M))$ は $\alpha^\vee(\Re\chi) > 0$, $(\forall\alpha \in \Sigma_P \setminus \Sigma_{P'})$ なる χ で絶対収束する。$W(M) := \mathrm{Norm}(M, G)/M$ を M の G での Weyl 群とする。$\sigma \in \Pi_2(M(F))$ が G **正則** (Harish-Chandra は不分岐と呼んでいる) とは $W(M)_\sigma := \{w \in W(M) \mid w(\sigma) \simeq \sigma\}$ が自明なこととする。

命題 7.4. $\sigma \in \Pi_2(M(F))$ が G 正則だとする。
(i) $P, P' \in \mathcal{P}(M)$ のとき、*Bruhat* フィルタ (4.3) は（*Grothendieck* 群に行かずとも）

$$I^G_P(\sigma)^{\mathrm{w}}_{P'} \simeq \bigoplus_{w \in W(M)} w(\sigma)$$

となる。
(ii) $I^G_P(\sigma)$ は既約で、$J_{P'|P}(\sigma) : I^G_P(\sigma) \to I^G_{P'}(\sigma)$ は（σ で正則で）同型になる。

$G(F)$ の許容緩増加表現 (π, V) の行列成分 $f_{v,v^\vee}$, $(v \in V,\ v^\vee \in V^\vee)$ に

$$(f_{v,v^\vee})^{\mathrm{w}}_P(m) := \langle \pi^{\mathrm{w}}_P(m) j^{\mathrm{w}}_P(v), j^{\mathrm{w}}_{\bar{P}}(v^\vee)\rangle, \quad m \in M(F)$$

を対応させる線型写像 $\mathcal{A}_{\mathrm{temp}}(G(F)) \ni f \mapsto f^{\mathrm{w}}_P \in \mathcal{A}_{\mathrm{temp}}(M(F))$ は定義可能で

$$\lim_{\substack{a \to \infty \\ P}} \left(\delta_P(ma)^{-1/2} f(ma) - f^{\mathrm{w}}_P(ma)\right) = 0$$

を満たす。ここで $\lim_{\substack{a\to\infty\\ P}}$ は $H(a)$ が $-\mathfrak{a}^+_P$ の十分中央で無限遠に向かったときの極限を表す。この f^{w}_P を f の P に沿っての**弱定数項**という。

8 Langlands 分類とその応用

8.1 Langlands 分類

$P = MU \in \mathcal{F}$ と $M(F)$ の既約緩増加表現 (π, V) それに $\lambda \in \mathfrak{a}_P^{*,+}$ があって

$$(I_P^G(\pi_\lambda), I_P^G(V_\lambda)), \quad \pi_\lambda(m) := e^{\langle\lambda, H_M(m)\rangle}\pi(m), \quad V_\lambda := V$$

と書ける $G(F)$ の許容表現を**標準加群 (standard module)** と呼ぶ。次は引用してある実 Lie 群の場合と全く同様に示せる。

補題 8.1 ([10] 補題 3.12). $(I_P^G(\pi_\lambda), I_P^G(V_\lambda))$ を $G(F)$ の標準加群とする。このとき、$\phi \in I_P^G(V_\lambda)$, $\phi^\vee \in I_P^G(V_{-\lambda}^\vee)$ に対して

$$\lim_{\substack{a \to \infty \\ \overline{P}}} \delta_P(a)^{1/2}\omega_{\pi_\lambda}(a)^{-1}\langle I_P^G(\pi_\lambda, ma)\phi, \phi^\vee\rangle = \gamma(G/M)^{-1}\langle \big(J_{\overline{P}|P}(\pi_\lambda)\phi\big)(m), \phi^\vee(1)\rangle$$

$(m \in M(F))$ が成り立つ。

これから次は直ちに従う。

系 8.2. $(I_P^G(\pi_\lambda), I_P^G(V_\lambda))$ が $G(F)$ の標準加群の時、$J_P^G(V_\lambda) := \mathrm{im} J_{\bar{P}|P}(\pi_\lambda)$ 上の $G(F)$ の表現 $J_P^G(\pi_\lambda)$ は $I_P^G(\pi_\lambda)$ の唯一の既約商表現である。これを $I_P^G(\pi_\lambda)$ の ***Langlands* 商**という。

以上のもとで Langlands 分類は次のように述べられる。

定理 8.3 (Langlands 分類). $G(F)$ の任意の既約許容表現は共役をのぞいてただ一つに定まる上のような三つ組 (P, π, λ) に対して $J_P^G(\pi_\lambda)$ の形に書ける。

これは基本的で重要な定理だが、以下で必要なのは Langlands 分類そのものではなく誘導表現の可約性を絡作用素の核に結びつける系 8.2 の方である。

8.2 応用

定理 5.1 で得られた絡作用素の有理性を用いて上から誘導表現の可約点に関する一般的な結果を引き出す。第一に次が成り立つ。$G(F)$ の許容表現 (π, V) は行列成分が $A_G(F)$ を法としてコンパクトな台を持つとき**カスプ表現**と呼ばれる。Harish-Chandra の定理からこれは任意の放物型真部分群 $P \subsetneq G$ に対して $\pi_P = 0$ となることに同値である。

補題 8.4. $P = MU \in \mathcal{F}$ が極大で (ρ, V) が $M(F)$ の既約カスプ表現の時、$\widehat{A}_M$ の空でない *Zariski* 開部分集合 $\Xi(\rho)$ があって

$$I_P^G(\rho_\chi), \quad \forall\chi \in \Xi(\rho)$$

証明. 実際、$\Re\chi$ が $\mathfrak{a}_M^* = \mathfrak{a}_P^{*,+} \sqcup \mathfrak{a}_G^* \sqcup \mathfrak{a}_{\overline{P}}^{*,+}$ のいずれに入るかによって分けて議論すればよい。$\Re\chi \in \mathfrak{a}_G^*$ の場合は命題 7.4 による。$\Re\chi \in \mathfrak{a}_P^{*,+}$ の場合を考える。定理 5.1 の証明のように $J \in \mathrm{Hom}_{G(F),B_M}(I_P^G(V_B), I_{\overline{P}}^G(V_B))$ と $b \in B_M$ で

$$b(\chi)J_{\overline{P}|P}(\rho_\chi)\phi_\chi = J(\phi)_\chi, \quad \chi \in \widehat{A}_M, \phi \in I_P^G(V_B)$$

となるものを取り、J に Jacquet 函手を施した $J_P \in \mathrm{Hom}_{M(F),B_M}(I_P^G(V_B)_P, I_{\overline{P}}^G(V_B)_P)$ を考える。Bruhat フィルタ $V_B = \mathcal{F}_{1,P}$ の非自明な元 v を取る。今の場合には系 8.2 と Jacquet 加群を考えることにより、$I_P^G(\rho_\chi)$ の可約点が $\chi \mapsto J_P(v)_\chi$ の零点に含まれることが示せるので主張が従う。$\Re\chi \in \mathfrak{a}_{\overline{P}}^{*,+}$ の時も同様である。 □

これは次の Waldspurger の既約性定理の Sauvageot による証明の唯一の問題点であったから、今や定理が成立する。

定理 8.5 ([11] 定理 3.2). $P = MU \in \mathcal{F}$ と $M(F)$ の既約許容表現 (π, V) に対して、$\mathfrak{a}_{M,\mathbb{C}}^*$ 内の 0 の近傍 $\mathcal{U}$ で次を満たすものが存在する。「$\alpha^\vee(\Re\lambda) \neq 0$, $(\forall\alpha \in \Sigma_M)$ なる任意の $\lambda \in \mathcal{U}$ で $I_P^G(\pi_\lambda)$ は既約。」

これから我々の構成にとって重要な次の結果が得られる。証明は絡作用素の函数等式を使って補題 8.4 の類似の議論を行う。

系 8.6. $P = MU \in \mathcal{F}$, $(\sigma, E) \in \Pi_2(M(F))$ とする。このとき $\widehat{A}_M$ の *Zariski* 開部分集合 $\Xi_P(\sigma)$ であって、任意の $\chi \in \Xi_P(\sigma)$ で $I_P^G(\sigma_\chi)$ が既約であるものが存在する。

9 j 函数と Plancherel 測度

$P = MU \in \mathcal{F}$, $(\sigma_0, E_0) \in \Pi_2(M(F))$ とし、σ_0 の $\widehat{A}_M$ 軌道を $\mathfrak{P}$ と書く。ユニタリ軸の代わりに円周の直積 $\mathfrak{P}_u := \{\sigma_0 \otimes \chi \,|\, \chi \in \widehat{A}_M^1\}$ を考える。系 8.6 から $\mathfrak{P}$ の空でない Zariski 開部分集合 $\Xi = \{\sigma_0 \otimes \chi \,|\, \chi \in \Xi_P(\sigma_0)\}$ があって、$I_P^G(\sigma)$, $(\forall\sigma \in \Xi)$ は既約である。そのような σ で $J_{P|\overline{P}}(\sigma) \circ J_{\overline{P}|P}(\sigma) \in \mathrm{End}_{\mathbf{G}}(I_P^G(V))$ は定数倍であるから、Ξ 上の（スカラー値）有理函数 $j_P(\sigma)$ があって

$$J_{P|\overline{P}}(\sigma) \circ J_{\overline{P}|P}(\sigma) = j_P(\sigma), \quad \sigma \in \Xi$$

となる。$\Xi \subset \mathfrak{P}$ は Zariski 開部分集合なので $j_P(\sigma)$ は $\mathfrak{P}$ 上の有理函数に一意に延びる。
絡作用素の函数等式および随伴公式から直ちに

$$j_P(\sigma) = j_{P'}(\sigma) = j_P(\sigma^\vee) = j_{w(P)}(w(\sigma)), \quad P, P' \in \mathcal{P}(M), w \in W \tag{9.1}$$

が従う。これを受けて以下 $j_P(\sigma)$ を $j(\sigma) = j^G(\sigma)$ と書く。$\alpha \in \Sigma_P^{\mathrm{red}}$ に対して $\Sigma_{PM_\alpha}^{\mathrm{red}} = \{\alpha\}$ となる $M_\alpha \supset M, \in \mathcal{L}$ がただ一つある。G を M_α で置き換えて $j^{M_\alpha}(\sigma)$ が定義される。このとき定義から**函数等式**

$$J_{P''|P'}(\sigma) \circ J_{P'|P}(\sigma) = \prod_{\alpha \in (\Sigma_P^{\mathrm{red}} \cap \Sigma_{P''}^{\mathrm{red}}) \setminus \Sigma_{P'}^{\mathrm{red}}} j^{M_\alpha}(\sigma) \cdot J_{P''|P}(\sigma), \quad P, P', P'' \in \mathcal{P}(M). \tag{9.2}$$

が得られる。特に $P'' = P$, $P' = \bar{P}$ として j 函数の**積公式**

$$j(\sigma) = \prod_{\alpha \in \Sigma_P^{\mathrm{red}}} j^{M_\alpha}(\sigma), \quad P \in \mathcal{P}(M). \tag{9.3}$$

が従う。最後に $\sigma \in \mathfrak{P}_u$ ならば (σ, E) 上の $M(F)$ 不変ユニタリ内積を $(\,,\,)$ として

$$(\phi, \phi') := \int_{\mathbf{K}} (\phi(k), \phi'(k))\, dk, \quad \phi, \phi' \in I_P^G(E)$$

は $I_P^G(E)$ 上の $G(F)$ 不変ユニタリ内積を与える。これについてのノルムを $\|\ \|$ と書けば、絡作用素の随伴公式から $j(\sigma)\|\phi\|^2 = \|J_{\overline{P}|P}(\sigma)\phi\|^2$ が成り立つから、

$$\sigma \in \mathfrak{P}_u \text{ のとき } j(\sigma) \neq 0。 \tag{9.4}$$

がわかる。

さて $(M, \mathfrak{P})$ を上の通りとして、$\sigma \in \mathfrak{P}$ の G での **Plancherel 測度**を

$$\mu(\sigma) = \mu^G(\sigma) := j(\sigma)^{-1} \prod_{\alpha \in \Sigma_P^{\mathrm{red}}} \gamma(M_\alpha/M)^2$$

と定める。これは明らかに $\mathfrak{P}$ 上の有理函数である。上の j 函数の性質から直ちに次を得る。

補題 9.1. *(i)* μ は $\mathfrak{P}_u$ 上正則で非負実数値を取る。
(ii) 積公式

$$\mu(\sigma) = \prod_{\alpha \in \Sigma_P^{\mathrm{red}}} \mu^{M_\alpha}(\sigma), \quad P \in \mathcal{P}(M), \sigma \in \mathfrak{P}$$

が成り立つ。
(iii) $\mu(\sigma) = \mu(w(\sigma)) = \mu(\sigma^\vee)$, $\forall w \in W$.

第 3 話 Plancherel 公式

10 Schwartz-Harish-Chandra 空間

6.2 節で導入した Ξ を使って、$C^{\mathrm{alg}}(G(F))$ 上のセミノルム族

$$\nu_r(f) := \sup_{g \in G(F)} |f(g)|\Xi(g)^{-1}(1 + \log \|g\|)^r, \quad r \in \mathbb{R}$$

を定める。ここで $\|\ \|$ はあらかじめ固定された $G(F)$ 上の高さ (height) 函数である。開コンパクト部分群 $K \subset G(F)$ に対して、

$$\mathcal{C}(K\backslash G(F)/K) := \{f \in C(K\backslash G(F)/K) \,|\, \nu_r(f) < \infty, \forall r \in \mathbb{R}\}$$

とおく。これは $\{\nu_r\}_{r\in\mathbb{R}}$ の定める Fréchet 位相について完備位相ベクトル空間になる。$G(F)$ 上の **Schwartz-Harish-Chandra 空間**を位相的帰納極限

$$\mathcal{C}(G(F)) := \varinjlim_{K} \mathcal{C}(K\backslash G(F)/K)$$

と定める。これは局所凸完備位相ベクトル空間であり、さらに次の性質を持つ。

(i) $\mathcal{C}(G(F))$ は畳み込み積について位相環になる。

(ii) $P = MU \in \mathcal{F}$ に沿っての **Harish-Chandra 変換**

$$f^{(P)}(m) := \delta_P(m)^{1/2} \int_{U(F)} f(mu)\, du$$

は連続写像 $\mathcal{C}(G(F)) \ni f \mapsto f^{(P)} \in \mathcal{C}(M(F))$ を与える。

Harish-Chandra の Plancherel 公式はこの $\mathcal{C}(G(F))$ 上の $G(F)$ の右正則表現のスペクトル分解を与えるものである。その基盤となるのが次に登場する Eisenstein 函数である。

11 Eisenstein 函数と c 函数

$P = MU \in \mathcal{F}$ と $M(F)$ の既約二乗可積分表現 (σ, E) に対して

$$L(P,\sigma) := I_{P\times P}^{G\times G}(E \otimes E^\vee) \simeq I_P^G(E) \otimes I_P^G(E^\vee),$$
$$\mathcal{L}(P,\sigma) := \mathcal{I}_{P\times P}^{G\times G}(E \otimes E^\vee) \simeq \mathcal{I}_P^G(E) \otimes \mathcal{I}_P^G(E^\vee)$$

とおく。**Eisenstein 函数** E_P^G を

$$E_P^G : L(P,\sigma) \ni \phi \otimes \phi^\vee \longmapsto f_{\phi,\phi^\vee} \in \mathcal{A}(G(F))$$

と定め、$P,\ P' \in \mathcal{P}(M)$ と $w \in W(M)$ に対して c **函数** $c_{P'|P}(w,\sigma)$ を

$$c_{P'|P}(w,\sigma) := \frac{1}{\gamma(G/M)} J_{P'|w(P)}(w(\sigma)) \circ w \otimes J_{\overline{P}'|w(P)}(w(\sigma^\vee)) \circ w : \\ L(P,\sigma) \longrightarrow \mathcal{L}(P', w(\sigma))$$

と定義する。アデール群上の絡作用素が Eisenstein 級数の定数項であったように、c 函数は Eisenstein 函数の弱定数項である。

命題 11.1. (σ, E) が G 正則の時、$\Phi \in L(P,\sigma)$ と $P,\ P' \in \mathcal{P}(M)$ に対して

$$E_P^G(\Phi)_{P'}^{\mathrm{w}} = \sum_{w \in W(M)} E_M^M(c_{P'|P}(w,\sigma)\Phi(1,1))$$

が成り立つ。

証明. 緩増加誘導表現の弱 Jacquet 加群に対する Bruhat フィルタ (命題 7.1 (iv)) から

$$I_P^G(E)_{P'}^{\mathrm{w}} \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{w \in W(M)} w(E), \quad I_P^G(E^\vee)_{P'}^{\mathrm{w}} \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{w \in W(M)} w(E^\vee)$$

である。σ の G 正則性からこの両者の右辺の既約表現たちはすべて互いに同型でないから、Schur の補題によりこれらの間の $M(F)$ 不変な双対性は各 $w(E) \times w(E^\vee)$ 上のそれの線型結合に限られる。一方で定理 5.1 の証明で見た、絡作用素と Bruhat フィルタとの関係から、上の同型は

$$I_P^G(E) \ni \phi \longmapsto \big(J_{P'|w(P)}(w(\sigma))w(\phi)(1)\big)_w \in \bigoplus_{w \in W(M)} w(E)$$

$$I_P^G(E^\vee) \ni \phi^\vee \longmapsto \big(J_{\overline{P}'|w(P)}(w(\sigma^\vee))w(\phi^\vee)(1)\big)_w \in \bigoplus_{w \in W(M)} w(E^\vee)$$

で与えられる。結局 $\gamma(P,w,\sigma) \in \mathbb{C}$, $(P \in \mathcal{P}(M),\ w \in W(M))$ があって

$$\begin{aligned}\langle j_{P'}^{\mathrm{w}}(\phi), j_{\overline{P}'}^{\mathrm{w}}(\phi^\vee)\rangle_{P'} \\ &= \sum_{w \in W(M)} \gamma(P,w,\sigma)\langle J_{P'|w(P)}(w(\sigma))w(\phi)(1), J_{\overline{P}'|w(P)}(w(\sigma^\vee))w(\phi^\vee)(1)\rangle \\ &= \sum_{w \in W(M)} \gamma(P,w,\sigma)\gamma(G/M)E_M^M\big((c_{P'|P}(w,\sigma)\phi \otimes \phi^\vee)(1,1)\big)\end{aligned}$$

である。あとは $\gamma(P,w,\sigma) = \gamma(G/M)^{-1}$ を示せばよい。まず (9.2) を使って $\gamma(P,w,\sigma) = \gamma(w(P),1,w(\sigma))$ と帰着する。続いて $P(F)\mathbf{K}^{\mathcal{U}}$ に台を持つ $\phi^\vee \in I_P^G(E^\vee)$ を取れば

$$\langle I_P^G(\sigma)_P^{\mathrm{w}}(a) j_P^{\mathrm{w}}(\phi), j_{\overline{P}}^{\mathrm{w}}(\phi^\vee)\rangle_P$$

は定義から、$a \underset{P}{\to} \infty$ のとき

$$\begin{aligned}\langle I_P^G(\sigma, a)\phi, \phi^\vee\rangle =& \int_{\mathbf{K}} \langle \phi(a^{-1}\mathrm{Ad}(a)k), \phi^\vee(k)\rangle \, dk \\ &-\gamma(G/M)^{-1} \int_{\mathbf{K}^{\bar{U}}} \langle \phi(a^{-1}\mathrm{Ad}(a)\bar{u}), \phi^\vee(\bar{u})\rangle \, d\bar{u} \\ &=\gamma(G/M)^{-1}\langle \phi(a^{-1}), \int_{\overline{U}(F)} \phi^\vee(\bar{u})\, d\bar{u}\rangle \\ &=\gamma(G/M)^{-1}\langle \sigma(a)\phi(1), \big(J_{\overline{P}|P}(\sigma^\vee)\phi^\vee\big)(1)\rangle\end{aligned}$$

に収束する。ところが ω_σ はユニタリだからこの二者は極限を取らなくとも一致している。特に $a=1$ として

$$\begin{aligned}\sum_{w\in W(M)} &\gamma(P, w, \sigma)\langle J_{P|w(P)}(w(\sigma))w(\phi)(1), J_{\overline{P}|w(P)}(w(\sigma^\vee))w(\phi^\vee)(1)\rangle \\ &= \gamma(G/M)^{-1}\langle \phi(1), J_{\overline{P}|P}(\sigma^\vee)\phi^\vee(1)\rangle\end{aligned}$$

が得られ、$\gamma(P, w, \sigma) = \gamma(G/M)^{-1}$ がわかる。 □

(σ, E) は二乗可積分ゆえユニタリ化可能であるから、その上の $M(F)$ 不変ユニタリ内積 $(\,,\,)$ が取れる。命題 7.4 の既約性からこれも、双対な $(\sigma^\vee, E^\vee)$ 上のユニタリ内積 $(\,,\,)^\vee$ も定数倍を除いて一意だから、これらのテンソル積 $(\,,\,)\otimes(\,,\,)^\vee$ は $E\otimes E^\vee$ 上の標準的な $M(F)\times M(F)$ 不変ユニタリ内積である。これから $I_P^G(E)\otimes I_P^G(E^\vee)$ にも $G(F)\times G(F)$ 不変標準ユニタリ内積 $(\,,\,)\otimes(\,,\,)^\vee$ が定まる。そこで $L(P, \sigma)$ 上の $G(F)\times G(F)$ 不変ユニタリ内積を

$$(\phi\otimes\phi^\vee, \phi'\otimes\phi'^\vee) := \frac{1}{d(\sigma)}(\phi, \phi')(\phi^\vee, \phi'^\vee)^\vee$$

と定め、それについてのノルムを $\|\;\|$ と書く。$\gamma(G/M)$ は積公式を満たさなかったから、

$$c(G/M) := \gamma(G/M)^{-1} \prod_{\alpha\in\Sigma_P^{\mathrm{red}}} \gamma(M_\alpha/M)$$

は自明ではない。c 函数の特異点については絡作用素の随伴公式 (補題 5.2) と正規化された函数等式 (9.2) から次がわかる。

補題 11.2. *(i)* (σ, E) が G 正則の時、

$$\mu(\sigma)\|c_{P'|P}(w, \sigma)\Phi\|^2 = c(G/M)^2\|\Phi\|^2.$$

(ii) $\mu(\sigma)c_{P'|P}(w, \sigma)$ は $\mathfrak{P}_u$ 上正則。

最後に

$${}^{\circ}c_{P'|P}(w, \sigma) := c_{P'|P'}(1, w(\sigma))^{-1}\circ c_{P'|P}(w, \sigma) : L(P, \sigma) \longrightarrow L(P', w(\sigma))$$

とおく。これは次の函数等式を通じてウェイブパケットの対称性を与える。

補題 11.3. *(i)* ${}^\circ c_{P'|P}(w,\sigma)$ は $\mathfrak{P}_u$ 上正則でユニタリ作用素。
(ii) 函数等式

$$E^G_{P'}({}^\circ c_{P'|P}(w,\sigma)\Phi) = E^G_P(\Phi)$$

が成り立つ。

実際、c 函数のノルムの式から G 正則な σ では

$$\|{}^\circ c_{P'|P}(w,\sigma)\Phi\|^2 = \|\Phi^2\|$$

が成り立つので、前半が従う。後半は絡作用素の函数等式や随伴公式から従う。

12 ウェイブパケット

$\Pi_2(M(F))$ 内の $\widehat{A}^1_M$ 軌道 $\mathfrak{P}_u$ を取る。$\sigma \in \mathfrak{P}_u$ の二つの実現 (σ, E), (σ, E') を取り $M(F)$ 同型 $A : E \xrightarrow{\sim} E'$ を止めれば、双対同型 $A^\vee : E'^\vee \xrightarrow{\sim} E^\vee$ が定まる。このとき

$$A \otimes (A^\vee)^{-1} : E \otimes E^\vee \xrightarrow{\sim} E' \otimes E'^\vee$$

は A の取り方によらない標準同型である。これから標準同型 $I^{G\times G}_{P\times P}(E\otimes E^\vee) \xrightarrow{\sim} I^{G\times G}_{P\times P}(E'\otimes E'^\vee)$ も与えられる。これまで $I^{G\times G}_{P\times P}(E\otimes E^\vee)$ を $L(P,\sigma)$ と書いてその実現 E を示唆しなかったのはこの事実による。

5 節でも注意したように $\sigma \in \mathfrak{P}_u$, $\chi \in \widehat{A}^1_M$ に対して

$$\mathrm{res}^{P\times P}_{\mathbf{K}\times\mathbf{K}}(\sigma_\chi) : L(P,\sigma_\chi) \ni \Phi \longmapsto \Phi|_{\mathbf{K}\times\mathbf{K}} \in I^{\mathbf{K}\times\mathbf{K}}_{\mathbf{K}^P\times\mathbf{K}^P}(E\otimes E^\vee)$$

は同型である。開コンパクト部分群 $K \subset \mathbf{K}$ に対して、$I^{\mathbf{K}\times\mathbf{K}}_{\mathbf{K}^P\times\mathbf{K}^P}(E\otimes E^\vee)^{K\times K}$ は有限次元で $\chi \in \mathrm{Stab}(\sigma, \widehat{A}^1_M)$ はその上に

$$\begin{array}{ccc}
I^{\mathbf{K}\times\mathbf{K}}_{\mathbf{K}^P\times\mathbf{K}^P}(E\otimes E^\vee)^{K\times K} & \xrightarrow{\ \chi\ } & I^{\mathbf{K}\times\mathbf{K}}_{\mathbf{K}^P\times\mathbf{K}^P}(E\otimes E^\vee)^{K\times K} \\
{\scriptstyle \mathrm{res}^{P\times P}_{\mathbf{K}\times\mathbf{K}}(\sigma)}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{res}^{P\times P}_{\mathbf{K}\times\mathbf{K}}(\sigma_\chi)} \\
I^{G\times G}_{P\times P}(E\otimes E^\vee)^{K\times K} & \xrightarrow{\text{標準同型}} & I^{G\times G}_{P\times P}(E_\chi\otimes E^\vee_{\chi^{-1}})^{K\times K}
\end{array}$$

を可換にする同型で作用している。この作用は必ずしも自明ではないことから、上の $\mathrm{res}^{P\times P}_{\mathbf{K}\times\mathbf{K}}$ によって

$$\begin{array}{c}
\widehat{A}^1_M \underset{\mathrm{Stab}(\sigma,\widehat{A}_M)}{\times} I^{\mathbf{K}\times\mathbf{K}}_{\mathbf{K}^P\times\mathbf{K}^P}(E\otimes E^\vee)^{K\times K} \\
\downarrow \\
\mathfrak{P}_u = \widehat{A}_M/\mathrm{Stab}(\sigma,\widehat{A}_M)
\end{array}$$

と同型になるベクトル束 $L(\mathfrak{P}_u, P)^{K\times K} : L(P,\sigma)^{K\times K} \to \sigma$ は必ずしも自明でない。このベクトル束の C^∞ 切断の空間を $C^\infty(\mathfrak{P}_u, P)^{K\times K}$ と書く。これを通常の Schwartz 位相について位相ベクトル空間と見なし、

$$C^\infty(\mathfrak{P}_u, P) := \varinjlim_{K} C^\infty(\mathfrak{P}_u, P)^{K\times K}$$

をそれらの位相的帰納極限と定義する。

命題 12.1. ウェイブパケット変換

$$C^\infty(\mathfrak{P}_u, P) \ni \Phi \longmapsto f_\Phi(g) := \int_{\mathfrak{P}_u} \mu(\sigma) E_P^G(\Phi_\sigma)(g)\, d\sigma \in \mathcal{C}(G(F))$$

は定義可能な連続写像である。

$P = MU \in \mathcal{F}$ と $\Pi_2(M(F))$ 内の $\widehat{A}_M^1$ 軌道 $\mathfrak{P}_u$ の組 $(\mathfrak{P}_u, P)$ たちの集合を $\Theta(G(F))$ と書く。

$$C^\infty(\Theta(G(F))) := \bigoplus_{(\mathfrak{P}_u, P) \in \Theta(G(F))} C^\infty(\mathfrak{P}_u, P)$$

とおき、Eisenstein 函数の函数等式 (補題 11.3) を考慮した部分空間

$$\begin{aligned} &C^\infty(\Theta(G(F)))^{\mathrm{inv}} \\ &:= \{\Phi = (\Phi_{(\mathfrak{P}_u, P)}) \in C^\infty(\Theta(G(F))) \mid \Phi_{(w(\mathfrak{P}_u), P'), w(\sigma)} = {}^\circ c_{P'|P}(w, \sigma)\Phi_{(\mathfrak{P}_u, P), \sigma}\} \end{aligned}$$

を用意する。ウェイブパケット変換をつかって

$$\begin{aligned} &\kappa : C^\infty(\Theta(G(F)))^{\mathrm{inv}} \ni \Phi \longmapsto \\ &\qquad \sum_{(\mathfrak{P}_u, P) \in \Theta(G(F))} c(G/M)^{-2} \gamma(G/M)^{-1} \frac{|W^M|}{|W||\mathcal{P}(M)|} f_{\Phi_{(\mathfrak{P}_u, P)}} \in \mathcal{C}(G(F)) \end{aligned}$$

と定め、$C^\infty(\Theta(G(F)))^{\mathrm{inv}}$ 上の非退化正定値エルミート内積

$$\begin{aligned} (\Phi, \Phi') := &\sum_{(\mathfrak{P}_u, P) \in \Theta(G(F))} c(G/M)^{-2} \gamma(G/M)^{-1} \frac{|W^M|}{|W||\mathcal{P}(M)|} \\ &\qquad \times \int_{\mathfrak{P}_u} \mu(\sigma) (\Phi_{(\mathfrak{P}_u, P), \sigma}, \Phi'_{(\mathfrak{P}_u, P), \sigma})\, d\sigma \end{aligned}$$

を導入する。

定理 12.2. $\kappa : C^\infty(\Theta(G(F)))^{\mathrm{inv}} \to \mathcal{C}(G(F))$ はその像への等距写像。

この等距写像の逆写像は次のように構成できる。開コンパクト部分群 $K \subset \mathbf{K}$ に対して $I_P^G(E)^K$ は有限次元なので同一視

$$\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(I_P^G(E)^K) \xrightarrow{\sim} I_P(E)^K \otimes I_P^G(E^\vee)^K$$

が成り立つ。$f \in \mathcal{C}(G(F))$ が両側 K 不変となる開コンパクト部分群 K を取れば $I_P^G(\sigma, f^\vee) \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(I_P^G(E)^K)$ であるので、その上の同一視による像を

$$I_P^G(\sigma, f^\vee) = \sum_{i=1}^n \phi_i \otimes \phi_i^\vee, \quad \phi_i \in I_P^G(E)^K,\ \phi_i^\vee \in I_P^G(E^\vee)^K$$

と書く。ただし、$f^\vee(g) := f(g^{-1})$ とした。これらを使って

$$\mathcal{C}(G(F)) \ni f \longmapsto \widehat{f}(\sigma, P) := d(\sigma)\sum_{i=1}^{n} \phi_i \otimes \phi_i^\vee \in L(P,\sigma)$$

と定義する。定義から容易に次が確かめられる。

$$(E_P^G(\Phi), f)_G = (\Phi, \widehat{f}(\sigma, P)), \quad \forall\Phi \in L(P,\sigma) \tag{12.1}$$

$$E_P^G(\widehat{f}(\sigma, P))(g) = d(\sigma)\mathrm{tr} I_P^G(\sigma, L(g)f^\vee). \tag{12.2}$$

ただし (12.1) において $G(F)$ 上の L^2 内積を

$$(f, f')_G := \int_{G(F)} f(g)\overline{f'(g)}\,dg$$

と書いた。右辺の内積はもちろん補題 11.2 の直前で定義したものである。

定理 12.3. $\widehat{\kappa(\Phi)}(\sigma, P) = \Phi_{(\mathfrak{P}_u, P),\sigma}$, $\forall\Phi \in C^\infty(\Theta(G(F)))^{\mathrm{inv}}$ が成り立つ。

13 Plancherel 公式

以上のもとでこのノートの主結果を述べることができる。

定理 13.1. $\kappa : C^\infty(\Theta(G(F)))^{\mathrm{inv}} \to \mathcal{C}(G(F))$ は全射である。

定理 12.2、定理 12.3 と $C^\infty(\Theta(G(F)))^{\mathrm{inv}}$ の定義からこれは次に同値である。

定理 13.1′ . $f \in \mathcal{C}(\mathbf{G})$ に対して $\widehat{f}(\sigma, P) \neq 0$, $(\exists\sigma \in \mathfrak{P}_u)$ となる $(\mathfrak{P}_u, P) \in \Theta(G(F))$ は有限個しかない。

定理 12.3 から κ の逆写像は $f \mapsto (\Phi_f)_{(\mathfrak{P}_u,P),\sigma} := \widehat{f}(\sigma, P)$ だから、(12.2) と併せて次が従う。

系 13.2 (Plancherel 公式). $f \in \mathcal{C}(G(F))$ は次の展開を持つ。

$$\begin{aligned} f(g) =& \kappa(\Phi_f)(g) \\ =& \sum_{(\mathfrak{P}_u,P)\in\Theta(G(F))} c(G/M)^{-2}\gamma(G/M)^{-1}\frac{|W^M|}{|W||\mathcal{P}(M)|}\int_{\mathfrak{P}_u} \mu(\sigma)d(\sigma)\mathrm{tr} I_P^G(\sigma, L(g)f^\vee)\,d\sigma \end{aligned}$$

定理 13.1 の証明 (概略). G の半単純 F ランクについての帰納法による。G_{der} が非等方的な場合には定理は与えられたレベルを持つカスプ表現の有限性 [1, 定理 4.14] に他ならない。$\mathcal{C}(G(F))$ の**カスプ部分空間**

$${}^\circ\mathcal{C}(G(F)) := \{f \in \mathcal{C}(G(F)) \,|\, f^{(P)} = 0, \forall P \subsetneq G\}$$

を導入する。帰納法の仮定から $f \in \mathcal{C}(G(F))$ に対して

$$\Psi_{f,(\mathfrak{P}_u,P)} = \begin{cases} 0 & P = G \text{ のとき} \\ \Phi_{f,(\mathfrak{P}_u,P)} & P \subsetneq G \text{ のとき} \end{cases}$$

で定まる Ψ_f は $\Theta(G(F))^{\mathrm{inv}}$ の定義可能な元である。これを使ってカスプ成分への射影

$$\mathcal{C}(G(F)) \ni f \longmapsto {}^\circ f := f - \kappa(\Psi_f) \in {}^\circ\mathcal{C}(G(F))$$

が定義できる。この ${}^\circ f$ に対して定理 13.1′ を示せばよい。$P = MU \subsetneq G$ で $\sigma \in \Pi_2(M(F))$ ならば $\widehat{({}^\circ f)}(\sigma, P) = 0$ であるから、次を示せばよい。

主張 13.2.1. 開コンパクト部分群 $K \subset G(F)$ に対して

$$\Theta_G(G(F))^K := \{(\mathfrak{P}_u, G) \in \Theta(G(F)) \,|\, \sigma \in \mathfrak{P}_u \text{ は } K \text{ 不変ベクトルを持つ}\}$$

は有限集合。

$A_G(F)G(F)^1$ は $G(F)$ の指数有限部分群だから、$\widehat{A}_G$ 軌道を考える代わりに中心指標を固定して考えてもよい。Schur の直交関係 (補題 6.2) から、次の主張を示せば十分である。

主張 13.2.2. $A_G(F)$ のユニタリ指標 ω に対して

$$\mathcal{A}_2(G(F))_\omega := \sum_{\sigma \in \Pi_2(G(F))_\omega} \mathcal{A}(\sigma)$$

とおけば、開コンパクト部分群 $K \subset G(F)$ に対して $\mathcal{A}_2(G(F))_\omega^{K \times K}$ は有限次元。

主張の ω と $f \in \mathcal{C}(G(F))$ に対して

$$p_\omega(f)(g) := \int_{A_G(F)} f(ag)\overline{\omega(a)}\, da$$

と定めれば、$\mathcal{A}_2(G(F))_\omega^{K \times K} := p_\omega({}^\circ\mathcal{C}(K \backslash G(F)/K))$ がわかる。K の特性函数を $\mathrm{meas}K$ で割って得られる函数 e_K (K-Hecke **環の単位元**) は $\mathcal{C}(K\backslash G(F)/K)$ に属するから、${}^\circ e_K$ が考えられる。このとき

$$\alpha_\omega(g,h) := \frac{1}{\mathrm{meas}K} \int_{A_G(F)} \int_K {}^\circ e_K(h^{-1}kag)\, dk\, \overline{\omega(a)}\, da$$

は $p_\omega({}^\circ\mathcal{C}(K\backslash G(F)/K))$ 上の恒等作用素の積分核になる。よって主張の有限次元性はこの積分核の対角部分集合上の積分

$$\int_{G(F)/A_G(F)} \alpha_\omega(g,g)\, dg = \int_{G(F)/A_G(F)} \int_{G(F)} {}^\circ e_K(g^{-1}xg)\psi(x)\, dx\, dg$$

$$\psi(x) := \begin{cases} \dfrac{\mathrm{meas}(A_G(F) \cap K)}{\mathrm{meas}K}\omega(a) & x = ak,\ (a \in A_G(F) \cap G(F)^1,\ k \in K) \\ 0 & x \notin A_G(F)K \cap G(F)^1 \text{ のとき} \end{cases} \in \mathcal{C}(G(F))$$

の収束性から従う。 □

参考文献

[1] I. N. Bernšteĭn and A. V. Zelevinskiĭ. Representations of the group $GL(n, F)$, where F is a local non-Archimedean field. *Uspehi Mat. Nauk*, 31(3(189)):5–70, 1976.

[2] J. N. Bernstein. Le "centre" de Bernstein. In *Representations of reductive groups over a local field*, pages 1–32. Hermann, Paris, 1984. Edited by P. Deligne.

[3] W. Casselman. Introduction to the theory of admissible representations of p-adic reductive groups. 未発表だがよいレクチャーノート. http://www.math.ubc.ca/ people/ faculty/ cass/ research/ p-adicbook.dvi からダウンロードできる.

[4] Harish-Chandra. Admissible invariant distributions on reductive p-adic groups. In *Lie theories and their applications (Proc. Ann. Sem. Canad. Math. Congr., Queen's Univ., Kingston, Ont., 1977)*, pages 281–347. Queen's Papers in Pure Appl. Math., No. 48. Queen's Univ., Kingston, Ont., 1978.

[5] Harish-Chandra. Harmonic analysis on real reductive groups I. The theory of constant term. In *Harish-Chandra collected papers, Vol. IV*, pages 102–202. Springer-Verlag, New York, 1984.

[6] Harish-Chandra. Harmonic analysis on real reductive groups II. Wave packets in the Schwartz space. In *Harish-Chandra collected papers, Vol. IV*, pages 203–257. Springer-Verlag, New York, 1984.

[7] Harish-Chandra. Harmonic analysis on real reductive groups III. The Maass-Selberg relations and the Plancherel formula. In *Harish-Chandra collected papers, Vol. IV*, pages 259–343. Springer-Verlag, New York, 1984.

[8] Harish-Chandra. Harmonic analysis on reductive p-adic groups. In *Harish-Chandra collected papers, Vol. IV*, pages 75–100. Springer-Verlag, New York, 1984.

[9] Harish-Chandra. The Plancherel formula for reductive p-adic groups. In *Harish-Chandra collected papers, Vol. IV*, pages 353–370. Springer-Verlag, New York, 1984.

[10] R. P. Langlands. On the classification of irreducible representations of real algebraic groups. In *Representation theory and harmonic analysis on semisimple Lie groups*, pages 101–170. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989.

[11] François Sauvageot. Principe de densité pour les groupes réductifs. *Compositio Math.*, 108(2):151–184, 1997.

[12] D. A. Vogan, Jr. and N. R. Wallach. Intertwining operators for real reductive groups. *Adv. Math.*, 82(2):203–243, 1990.

[13] J.-L. Waldspurger. La formule de Plancherel pour les groupes p-adiques. プレプリント, Paris VII 大学, 1997 年. Jour. Inst. Math. Jussieu に掲載予定.

[14] Nolan R. Wallach. *Real reductive groups. II.* Academic Press Inc., Boston, MA, 1992.

[15] 今野拓也 今野和子. p 進簡約群の Plancherel 公式— Harish-chandra, Waldspurger による. 2001 年度九州大学「簡約群と保型形式」セミナーのノート. http://knmac.math.kyushu-u.ac.jp からダウンロードできる.